Jurnal Kolaboratif Sains, Volume 8 No. 1, Januari 2025, 300 - 313

Jurnal Kolaboratif Sains e-ISSN : 2623-2022

Homepage Journal: https://jurnal.unismuhpalu.ac.id/index.php/JKS

Analisis Aproksimasi Padé dan Aplikasinya Aproksimasi Fungsi

Padé Approximation Analysis and Its Application of Function Approximation

Binti Karomah
Universitas Surakarta
***Corresponding Author**: **E-mail:** bintikaromah@gmail.com

Artikel Penelitian

Article History:
Received: 18 Nov, 2024
Revised: 21 Dec, 2024
Accepted: 29 Jan, 2025

Kata Kunci:
Fungsi;
Hampiran;
Aproksimasi Padé

Keywords:
function;
approximation;
Padé approximation

DOI: 10.56338/jks.v8i1.6676

ABSTRAK
Persoalan matematika yang banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari biasanya dinyatakan dalam bentuk fungsi. Fungsi-fungsi tersebut sering tidak dapat diselesaikan dengan penghitungan secara eksak (biasa) sehingga perlu dilakukan perhitungan dengan hampiran (aproksimasi) untuk mendekati nilainya. Pada umumnya, penghampiran terhadap nilai suatu fungsi terutama fungsi dalam deret pangkat tak hingga dilakukan ke dalam bentuk polinom. Namun, dalam kondisi tertentu suatu fungsi tidak dapat dihampiri dengan bentuk polinom. Dalam kondisi seperti ini, suatu fungsi dapat dihampiri ke dalam bentuk fungsi rasional menggunakan aproksimasi Padé. Adapun langkah-langkah dalam mengkonstruksi aproksimasi Padé yang sesuai dengan deret pangkat (power series) adalah sebagai berikut: (1) mendefinisikan suatu fungsi f(z) ke dalam ekspansi deret Maclaurin, (2) mengasumsikan suatu fungsi rasional R_(L,M) (z) (3) membentuk suatu sistem persamaan koefisien untuk masing-masing konstanta pada variabel Z^0,z,z^2 dan (4) menentukan koefisien-koefisien pembilang dan penyebut fungsi rasional R_(L,M) (z) dengan menyelesaikan sistem persamaan koefisien yang diperoleh.

ABSTRACT
Mathematical problems that are often encountered in everyday life are usually expressed in the form of functions. These functions often cannot be solved by exact (ordinary) calculations so that calculations need to be carried out with approximations to approach their values. In general, approximations to the value of a function, especially functions in infinite power series, are carried out in the form of polynomials. However, in certain conditions a function cannot be approximated by a polynomial form. In conditions like this, a function can be approximated into a rational function form using the Padé approximation. The steps in constructing the Padé approximation that corresponds to the power series are as follows: (1) defining a function f(z) into a Maclaurin series expansion, (2) assuming a rational function R_(L,M) (z) (3) forming a system of coefficient equations for each constant in the variables Z^0,z,z^2 and (4) determining the coefficients of the numerator and denominator of the rational function R_(L,M) (z) by solving the system of coefficient equations obtained.

PENDAHULUAN
Persoalan-persoalan yang melibatkan model matematika banyak dijumpai dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan. Persoalan-persoalan tersebut biasanya dinyatakan dalam bentuk fungsi. Persoalan-persoalan matematika tersebut sering tidak dapat diselesaikan dengan perhitungan analitik (eksak) sehingga perlu dilakukan perhitungan melalui hampiran atau aproksimasi untuk mendapatkan suatu nilai yang mendekati nilai eksaknya. Hal ini berarti bahwa dalam penyelesaian melalui aproksimasi terdapat suatu kesalahan (error) terhadap nilai eksaknya. Dalam perhitungan dengan aproksimasi terdapat tiga macam kesalahan (error) yang mungkin terjadi yaitu kesalahan bawaan, kesalahan pembulatan, dan kesalahan pemotongan. Kesalahan bawaan merupakan kesalahan dari nilai data yang mungkin terjadi karena kekeliruan dalam menyalin data atau membaca skala pengukuran. Kesalahan pembulatan terjadi karena tidak diperhitungkannya beberapa angka terakhir dari suatu bilangan sedangkan kesalahan pemotongan merupakan kesalahan karena hanya mempergunakan beberapa suku pertama. Kesalahan pemotongan biasanya terjadi apabila suatu fungsi direpresentasikan

dalam bentuk deret pangkat tak hingga. Pada umumnya, hampiran terhadap suatu fungsi dilakukan berdasarkan penghampiran ke dalam bentuk polinom. Hal ini sesuai dengan pernyataan Munir (2006: 18) bahwa kebanyakan dari metode-metode aproksimasi yang diturunkan didasarkan pada penghampiran fungsi ke dalam bentuk polinom. Hal itu dilakukan karena polinom merupakan bentuk yang paling mudah dipahami, mudah dihitung, dan hanya akan melibatkan pangkat-pangkat bilangan bulat sederhana. Salah satu bentuk polinom yang bisa digunakan untuk menghampiri suatu fungsi adalah deret Taylor. Deret Taylor merupakan salah satu jenis deret pangkat (power series) selain deret Maclaurin dan deret Laurent. yang dimaksud deret pangkat yakni deret tak hingga yang berbentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

dengan n a dan 0 z konstanta kompleks dan n = 0, 1, 2, …. Dalam kondisi tertentu, suatu fungsi tidak dapat didekati dengan bentuk polinom. Dalam kasus ini, fungsi tersebut dapat didekati dengan suatu fungsi rasional menggunakan aproksimasi Padé. Aproksimasi Padé merupakan sebuah pecahan rasional yang dinyatakan oleh persamaan

$$R_{m,n}(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n}$$

dengan suatu ekspansi deret pangkat yang sesuai untuk suku pertama m+ n +1 dari ekspansi deret pangkat fungsi f (z) yang diinginkan. Metode aproksimasi Padé dalam beberapa hal memberikan hasil yang lebih baik dibandingkan dengan metode aproksimasi polinom Taylor yang biasanya lebih dikenal. Solusi yang diperoleh dengan menggunakan aproksimasi berbentuk suatu fungsi matematik. Fungsi tersebut dapat dievaluasi untuk menghasilkan nilai dalam bentuk angka atau numerik. Berdasarkan uraian di atas, maka penulis tertarik untuk mengkajinya lebih lanjut tentang Analisis Aproksimasi Padé dan Penerapannya pada Hampiran Fungsi

METODE

Penelitian ini merupakan sebuah study literature yaitu melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi menggunakan teknik dokumenter, artinya data-data sumber penelitian dikumpulkan dari dokumen-dokumen, baik yang berupa buku, artikel, jurnal, majalah, maupun karya ilmiah lainnya yang berkaitan dengan topik atau permasalahan yang diteliti. Adapun tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut: 1. Mencari, mempelajari dan menelaah sumber-sumber informasi yang berhubungan dengan topik yang diteliti. 2. Memberikan deskripsi dan pembahasan lebih lanjut tentang konstruksi aproksimasi Padé yang sesuai untuk suatu deret pangkat (power series). 3. Memberikan contoh penerapan aproksimasi Padé dalam menghampiri suatu fungsi transenden jenis eksponensial dan trigonometri (fungsi sinus dan fungsi kosinus). 4. Memberikan kesimpulan akhir dari hasil pembahasan.

HASIL

Suatu fungsi biasanya dihampiri kedalam bentuk polinom. Fungsi yang bentuknya rumit menjadi lebih sederhana bila dihampiri dengan polinom karena polinom merupakan bentuk fungsi yang paling mudah dipahami, mudah dihitung dan hanya melibatkan pangkat pangkat bilangan bulat sederhana Suatu fungsi yang tidak dapat ditentukan nilainya dengan penghampiran ke dalam bentuk polinom dapat dihampiri dengan suatu fungsi rasional. Berikut ini akan diberikan pembahasan mengenai konstruksi aproksimasi Padé untuk menghampiri suatu fungsi dalam bentuk deret pangkat (power series) dan penerapan aproksimasi Padé untuk menghampiri fungsi transenden jenis fungsi eksponensial dan fungsi trigonometri (fungsi sinus dan fungsi kosinus).

Konstruksi Aproksimasi Padé

Aproksimasi Padé merupakan sebuah metode untuk memperoleh fungsi rasional yang dapat digunakan untuk menghampiri nilai suatu fungsi. Sebelum membahas tentang konstruksi aproksimasi Padé, berikut ini adalah definisi aproksimasi Padé dan teoremanya.

Definisi 1 Aproksimasi Padé

Didefinisikan suatu fungsi $f(z)$ dan suatu fungsi rasional $R_{L,M}(z)=\dfrac{P_L(z)}{Q_M(z)}$, dimana $P_L(z)$ dan $Q_M(z)$ memenuhi persamaan $Q_M(z)\cdot f(z)-P_L(z)=O\left[z^{L+M+1}\right]$, dan $Q_M(z)\neq 0$ maka fungsi rasional $R_{L,M}(z)$ merupakan aproksimasi Padé pada fungsi $f(z)$.

Teorema 1 Aproksimasi Padé

Dengan mendefinisikan pembilang $P_L(z)$ dan penyebut $Q_M(z)$ dari suatu fungsi rasional $R_{L,M}(z)$ untuk menghampiri fungsi $f(z)$ yang diekspansi ke dalam deret pangkat $\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$ berlaku $Q_M(z)\cdot f(z)-P_L(z)=O\left[z^{L+M+1}\right]$.

Berdasarkan definisi dan teorema di atas, selanjutnya akan dijelaskan langkah-langkah dalam mengkonstruksi aproksimasi Padé yang sesuai dengan deret pangkat (*power series*) adalah sebagai berikut:

1. Mendefinisikan suatu fungsi $f(z)$ ke dalam ekspansi deret Maclaurin.
2. Mengasumsikan suatu fungsi rasional $R_{L,M}(z)$ yang didefinisikan sebagai:
$$R_{L,M}(z)=\frac{P_L(z)}{Q_M(z)},$$
dengan $Q_M(z)\neq 0$ untuk menghampiri fungsi $f(z)$ sehingga berlaku
$$Q_M(z)\cdot f(z)-P_L(z)=O\left[z^{L+M+1}\right].$$
dimana $O\left(z^{L+M+1}\right)$ merupakan sisa pemotongan untuk suku ke-*(L+M+1)*.
3. Membentuk suatu sistem persamaan koefisien untuk masing-masing konstanta pada variabel $z^0, z, z^2, \cdots$.
4. Menentukan koefisien-koefisien pembilang dan penyebut fungsi rasional $R_{L,M}(z)$ dengan menyelesaikan sistem persamaan koefisien yang diperoleh.

Penerapan Aproksimasi Padé pada Hampiran Fungsi Berikut ini akan diberikan contoh penerapan aproksimasi Padé untuk menghampiri fungsi eksponensial dan fungsi trigonometri (fungsi sinus dan fungsi kosinus) yang diekspansi ke dalam deret Maclaurin. Pemilihan contoh untuk menghampiri kedua jenis fungsi ini dilakukan karena kedua fungsi tersebut merupakan jenis fungsi transenden yang banyak dikenal dan mudah untuk dipelajari. Contoh-contoh yang diambil merupakan bentuk yang paling sederhana. Untuk masing-masing fungsi dilakukan penghampiran dengan dua kasus yaitu untuk fungsi rasional dengan L = M = 1 dan fungsi rasional dengan L = 2 dan M =1. Pembagian ini dilakukan sesuai dengan sifat aljabar yang berlaku pada fungsi rasional yaitu L = M dan L > M . 1.

Fungsi Eksponensial

Ekspansi deret Maclaurin untuk fungsi eksponensial dinyatakan oleh

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

atau

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \cdots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (11)$$

a. Untuk $L = M = 1$.

Persamaan eksponensial tersebut bisa dinyatakan sebagai

$$e^z = \frac{a_0 + a_1 z}{b_0 + b_1 z} + O(z^3) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (12)$$

Dengan demikian, kita dapat menyatakan persamaan (11) dan (12) dalam bentuk berikut:

$$1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \cdots = \frac{a_0 + a_1 z}{b_0 + b_1 z} + O(z^3)$$

$$(b_0 + b_1 z)\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \cdots\right) = (a_0 + a_1 z) + O(z^3)$$

$$(b_0 + b_1 z)\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \cdots\right) - (a_0 + a_1 z) = O(z^3)$$

$$(b_0 - a_0) + (b_0 + b_1 - a_1)z + \left(\frac{b_0}{2} + b_1\right)z^2 + \cdots = O(z^3)$$

Dengan membentuk sistem persamaan koefisien diperoleh bahwa

$b_0 - a_0 = 0$ maka $b_0 = a_0$,

$b_0 + b_1 - a_1 = 0$ maka $a_1 = \frac{b_0}{2}$,

$\frac{b_0}{2} + b_1 = 0$ maka $b_1 = -\frac{b_0}{2}$.

Selanjutnya, kita akan memperoleh bahwa

$$R_{1,1}(z) = \frac{b_0 + \frac{b_0}{2} z}{b_0 - \frac{b_0}{2} z}, \qquad (ambil \quad b_0 = 1)$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{2} z}{1 - \frac{1}{2} z}.$$

Jadi, approksimasi Padé $[1/1]$ untuk fungsi eksponensial adalah

$$e^z \approx \frac{\left(1 + \frac{1}{2} z\right)}{\left(1 - \frac{1}{2} z\right)}.$$

Secara sepintas, bentuk yang kita peroleh dengan aproksimasi Padé untuk fungsi eksponensial sebagaimana di atas tidak sama dengan ekspansi deret Maclaurin yang telah dinyatakan sebelumnya. Selanjutnya, akan kita tunjukkan bahwa nilai tersebut menghampiri fungsi eksponensial sesuai dengan ekspansi deret Maclaurinnya.

Fungsi $f(z) = e^z \approx \dfrac{\left(1+\frac{1}{2}z\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z\right)}$ analitik di setiap titik kecuali pada $z = 2$. Jadi, fungsi tersebut mempunyai lingkaran kekonvergenan dengan radius $R = 2$. Dalam domain ini, maka bisa dinyatakan bahwa

$$f(z) = f_1(z).f_2(z)$$

$$= \left(1+\frac{1}{2}z\right).\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z\right)}, \qquad (|z| < 2).$$

Dalam domain $|z| < 2$, maka berlaku bahwa $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$.

Untuk $f_2(z) = \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z\right)}$, dengan ekspansi Maclaurin kita memperoleh bahwa

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z\right)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \\ &= 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} + \cdots \end{aligned}$$

Sehingga, kita memperoleh bahwa

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z).f_2(z) \\ &= \left(1+\frac{1}{2}z\right).\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \\ &= \left(1+\frac{1}{2}z\right)\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\frac{z^3}{8}+\cdots\right) \\ &= \left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\frac{z^3}{8}+\cdots\right)+\left(\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\frac{z^3}{8}+\cdots\right) \\ &= 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{4} + \cdots, \qquad |z| < 2. \end{aligned}$$

Persamaan di atas menunjukkan bahwa nilai fungsi eksponensial yang dihampiri dengan aproksimasi Padé sesuai dengan ekspansi Maclaurinnya. Selanjutnya, kita akan menguji kekonvergenan deret tersebut.

Ekspansi Maclaurin untuk fungsi eksponensial dinyatakan oleh

Sehingga, kita memperoleh bahwa

$$
\begin{aligned}
f(z) &= f_1(z).f_2(z) \\
&= \left(1+\frac{1}{2}z\right).\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \\
&= \left(1+\frac{1}{2}z\right)\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\frac{z^3}{8}+\cdots\right) \\
&= \left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\frac{z^3}{8}+\cdots\right)+\left(\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\frac{z^3}{8}+\cdots\right) \\
&= 1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{4}+\cdots, \qquad |z|<2.
\end{aligned}
$$

Persamaan di atas menunjukkan bahwa nilai fungsi eksponensial yang dihampiri dengan aproksimasi Padé sesuai dengan ekspansi Maclaurinnya. Selanjutnya, kita akan menguji kekonvergenan deret tersebut.

Ekspansi Maclaurin untuk fungsi eksponensial dinyatakan oleh

$$f(z)=e^z \approx 1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\frac{z^4}{24}+\cdots, \qquad |z|<\infty.$$

Dengan aproksimasi Padé, $f(z)=S_n(z)$ diperoleh bahwa

$$f(z)=e^z \approx 1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{4}+\cdots, \qquad |z|<2.$$

Maka,

$$
\begin{aligned}
|R_n(z)| &= |f(z)-S_n(z)| \\
&= \left|\left(1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\ldots\right)-\left(1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{4}+\ldots\right)\right|
\end{aligned}
$$

$$= \left| -\frac{z^3}{12} + \ldots \right|.$$

Ambil $\varepsilon = \frac{2}{3}$, maka kita akan memperoleh bahwa

$$|R_n(z)| < \varepsilon$$

$$\left| -\frac{z^3}{12} \right| < \frac{2}{3}$$

$$\frac{z^3}{12} < \frac{2}{3}$$

$$z^3 < 8$$

$$z < 2.$$

Dengan demikian, maka fungsi e^z yang mempunyai ekspansi Maclaurin tersebut konvergen seragam dengan $\varepsilon = \frac{2}{3}$ pada domain $D = \{z : |z| < 2\}$.

b. Untuk $L = 2$ dan $M = 1$

Persamaan eksponensialnya bisa dinyatakan sebagai

$$e^z = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2}{b_0 + b_1 z} + O(z^4) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (13)$$

Dengan demikian, kita dapat menyatakan persamaan (11) dan (13) dalam bentuk berikut:

$$1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \cdots = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2}{b_0 + b_1 z} + O(z^4)$$

$$1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \cdots = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2}{b_0 + b_1 z} + O(z^4)$$

$$(b_0 + b_1 z)\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \cdots\right) = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2) + O(z^4)$$

$$(b_0 + b_1 z)\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \cdots\right) - (a_0 + a_1 z + a_2 z^2) = O(z^4)$$

$$(b_0 - a_0) + (b_0 + b_1 - a_1)z + \left(\frac{b_0}{2} + b_1 - a_2\right)z^2 + \left(\frac{b_0}{6} + \frac{b_1}{2}\right)z^3 + \cdots = O(z^4)$$

Dengan membentuk sistem persamaan koefisien diperoleh bahwa

$b_0 - a_0 = 0$ maka $b_0 = a_0$,

$b_0 + b_1 - a_1 = 0$ maka $a_1 = \frac{2}{3} b_0$,

$\frac{b_0}{2} + b_1 - a_2 = 0$ maka $a_2 = \frac{1}{6} b_0$,

$\frac{b_0}{6}+\frac{b_1}{2}=0$ maka $b_1=-\frac{1}{3}b_0$.

Selanjutnya, kita akan memperoleh bahwa

$$R_{2,1}(z)=\frac{\left(b_0+\frac{2}{3}b_0z+\frac{1}{6}b_0z^2\right)}{\left(b_0-\frac{1}{3}b_0z\right)}, \qquad (ambil \quad b_0=1)$$

$$=\frac{1+\frac{2}{3}z+\frac{1}{6}z^2}{1-\frac{1}{3}z}.$$

Jadi, aproksimasi Padé $[2/1]$ untuk fungsi eksponensial adalah

$$e^z\approx\frac{\left(1+\frac{2}{3}z+\frac{1}{6}z^2\right)}{\left(1-\frac{1}{3}z\right)}.$$

Seperti dalam kasus $L=M=1$, secara sepintas bentuk yang kita peroleh dengan aproksimasi Padé untuk fungsi eksponensial sebagaimana di atas juga tidak sama dengan ekspansi deret Maclaurin yang telah dinyatakan sebelumnya. Selanjutnya, akan kita tunjukkan bahwa nilai tersebut menghampiri fungsi eksponensial sesuai dengan ekspansi deret Maclaurinnya.

Fungsi $f(z)=e^z\approx\frac{\left(1+\frac{2}{3}z+\frac{1}{6}z^2\right)}{\left(1-\frac{1}{3}z\right)}$ analitik di setiap titik kecuali pada $z=3$. Jadi, fungsi tersebut mempunyai lingkaran kekonvergenan dengan radius $R=3$. Dalam domain ini, maka bisa dinyatakan bahwa

$$f(z)=f_1(z).f_2(z)$$

$$=\left(1+\frac{2}{3}z+\frac{1}{6}z^2\right).\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}z\right)}, \qquad (|z|<3).$$

Dalam domain $|z|<3$, maka berlaku bahwa $\left|\frac{z}{3}\right|<1$.

Untuk $f_2(z)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}z\right)}$, dengan ekspansi Maclaurin kita memperoleh bahwa

$$f_2(z)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}z\right)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n$$

$$= 1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}+\frac{z^3}{27}+\frac{z^4}{81}+\cdots$$

Sehingga, kita memperoleh bahwa

$$f(z)=f_1(z).f_2(z)$$

$$=\left(1+\frac{2}{3}z+\frac{1}{6}z^2\right).\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n$$

$$=\left(1+\frac{2}{3}z+\frac{1}{6}z^2\right)\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}+\frac{z^3}{27}+\frac{z^4}{81}+\cdots\right)$$

$$=\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}+\frac{z^3}{27}+\frac{z^4}{81}+\cdots\right)+\left(\frac{2}{3}z+\frac{2}{9}z^2+\frac{2}{27}z^3+\frac{2}{81}z^4+\cdots\right)+$$

$$\left(\frac{1}{6}z^2+\frac{1}{18}z^3+\frac{1}{54}z^4+\cdots\right)$$

$$=1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\frac{z^4}{18}+\cdots,\qquad |z|<3.$$

Persamaan di atas menunjukkan bahwa nilai fungsi eksponensial yang dihampiri dengan aproksimasi Padé sesuai dengan ekspansi Maclaurinnya. Selanjutnya, kita akan menguji kekonvergenan deret tersebut.

Ekspansi Maclaurin untuk fungsi eksponensial dinyatakan oleh

$$f(z)=e^z\approx 1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\frac{z^4}{24}+\cdots,\qquad |z|<\infty.$$

Dengan aproksimasi Padé, $f(z)=S_n(z)$ diperoleh bahwa

$$f(z)=e^z\approx 1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\frac{z^4}{18}+\cdots,\qquad |z|<3.$$

Maka,

$$|R_n(z)|=|f(z)-S_n(z)|$$

$$=\left|\left(1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\frac{z^4}{24}+\ldots\right)-\left(1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\frac{z^4}{18}+\ldots\right)\right|$$

$$=\left|-\frac{z^4}{72}+\ldots\right|.$$

Ambil $\varepsilon=\frac{9}{8}$, maka kita akan memperoleh bahwa

$$|R_n(z)|<\varepsilon$$

$$f(z) = e^z \approx 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{18} + \cdots, \qquad |z| < 3.$$

Maka,

$$\begin{aligned} |R_n(z)| &= |f(z) - S_n(z)| \\ &= \left| \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \ldots\right) - \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{18} + \ldots\right) \right| \\ &= \left| -\frac{z^4}{72} + \ldots \right|. \end{aligned}$$

Ambil $\varepsilon = \frac{9}{8}$, maka kita akan memperoleh bahwa

$$|R_n(z)| < \varepsilon$$

Dengan demikian, kita dapat menyatakan persamaan (14) dan (15) dalam bentuk berikut:

$$z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots = \frac{a_0 + a_1 z}{b_0 + b_1 z} + O(z^3)$$

$$(b_0 + b_1 z)\left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots\right) = (a_0 + a_1 z) + O(z^3)$$

$$(b_0 + b_1 z)\left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots\right) - (a_0 + a_1 z) = O(z^3)$$

$$(-a_0) + (b_0 - a_1)z + b_1 z^2 + \cdots = O(z^3)$$

Dengan membentuk sistem persamaan koefisien diperoleh

$-a_0 = 0$ maka $a_0 = 0$,

$b_0 - a_1 = 0$ maka $b_0 = a_1$,

$b_1 = 0$.

Dengan demikian, kita memperoleh bahwa

$$R_{1,1}(z) = \frac{b_0 z}{b_0} = z.$$

Jadi, approksimasi Padé $[1/1]$ untuk fungsi sinus adalah

$\sin z \approx z$.

b. Untuk $L = 2$ dan $M = 1$

Persamaan sinusnya bisa dinyatakan sebagai

$$\sin z = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2}{b_0 + b_1 z} + O(z^4) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (16)$$

Dengan demikian, kita dapat menyatakan persamaan (14) dan (16) dalam bentuk berikut:

$$z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2}{b_0 + b_1 z} + O(z^4)$$

$$(b_0 + b_1 z)\left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots\right) = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2) + O(z^4)$$

$$(b_0 + b_1 z)\left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots\right) - (a_0 + a_1 z + a_2 z^2) = O(z^4)$$

$$(-a_0) + (b_0 - a_1)z + (b_1 - a_2)z^2 + \left(-\frac{b_0}{6}\right)z^3 + \cdots = O(z^4)$$

Dengan membentuk sistem persamaan koefisien diperoleh

$-a_0 = 0$ maka $a_0 = 0$,

$b_0 - a_1 = 0$ maka $b_0 = a_1 = 0$,

$b_1 - a_2 = 0$ maka $b_1 = a_2$,

$-\frac{b_0}{6} = 0$ maka $b_0 = 0$.

Dengan demikian, kita memperoleh bahwa

$$R_{2,1}(z) = \frac{b_1 z^2}{b_1 z} = z \,.$$

$$R_{2,1}(z) = \frac{b_1 z^2}{b_1 z} = z \,.$$

Jadi, approksimasi Padé $[2/1]$ untuk fungsi sinus adalah

$\sin z \approx z$.

3. Fungsi Kosinus

Ekspansi deret Maclaurin untuk fungsi sinus dinyatakan oleh

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$$

atau

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{270} + \cdots \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (17)$$

a. Untuk $L = M = 1$

Persamaan kosinusnya bisa dinyatakan sebagai

$$\cos z = \frac{a_0 + a_1 z}{b_0 + b_1 z} + O(z^3) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (18)$$

Dengan demikian, kita dapat menyatakan persamaan (17) dan (18) dalam bentuk berikut:

$$1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}-\frac{z^6}{270}+\cdots=\frac{a_0+a_1z}{b_0+b_1z}+O(z^3)$$

$$(b_0+b_1z)\left(1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}-\frac{z^6}{270}+\cdots\right)=(a_0+a_1z)+O(z^3)$$

$$(b_0+b_1z)\left(1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}-\frac{z^6}{270}+\cdots\right)-(a_0+a_1z)=O(z^3)$$

$$(b_0-a_0)+(b_1-a_1)z+\left(-\frac{b_0}{2}\right)z^2+\left(-\frac{b_1}{2}\right)z^3+\cdots=O(z^3)$$

Dengan membentuk sistem persamaan koefisien diperoleh

$b_0-a_0=0$ maka $b_0=a_0$,

$b_1-a_1=0$ maka $b_1=a_1$.

Dengan demikian, kita memperoleh bahwa

$$R_{1,1}(z)=\frac{b_0+b_1z}{b_0+b_1z}=1.$$

Jadi, approksimasi Padé $[1/1]$ untuk fungsi kosinus adalah

$\cos z\approx 1$.

b. Untuk $L=2$ dan $M=1$

Persamaan kosinusnya bisa dinyatakan sebagai

$$\cos z=\frac{a_0+a_1z+a_2z^2}{b_0+b_1z}+O(z^4) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Dengan demikian, kita dapat menyatakan persamaan (17) dan (19) dalam bentuk berikut:

$$1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}-\frac{z^6}{270}+\cdots=\frac{a_0+a_1z+a_2z^2}{b_0+b_1z}+O(z^4)$$

$$(b_0+b_1z)\left(1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}-\frac{z^6}{270}+\cdots\right)=(a_0+a_1z+a_2z^2)+O(z^4)$$

$$(b_0+b_1z)\left(1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}-\frac{z^6}{270}+\cdots\right)-(a_0+a_1z+a_2z^2)=O(z^4)$$

$$(b_0-a_0)+(b_1-a_1)z+\left(-\frac{b_0}{2}-a_2\right)z^2+\left(-\frac{b_1}{2}\right)z^3+\cdots=O(z^4)$$

Dengan membentuk sistem persamaan koefisien diperoleh

$b_0-a_0=0$ maka $b_0=a_0$,

$b_1-a_1=0$ maka $b_1=a_1=0$,

$-\frac{b_0}{2}-a_2=0$ maka $a_2=-\frac{b_0}{2}$,

$-\frac{b_1}{2}=0$ maka $b_1=0$.

Dengan demikian, diperoleh bahwa

$$R_{2,1}(z)=\frac{b_0-\frac{b_0}{2}z^2}{b_0} \qquad (ambil \quad b_0=1)$$

$$=1-\frac{1}{2}z^2.$$

Jadi, approksimasi Padé $[2/1]$ untuk fungsi kosinus adalah

$$\cos z\approx 1-\frac{1}{2}z^2.$$

KESIMPULAN

Penelitian ini dapat diambil beberapa kesimpulan,diantaranya adalah:

1. Langkah-langkah mengkonstruksi aproksimasi Padé yang sesuai dengan deret pangkat (*power series*) adalah sebagai berikut:
   a) Mendefinisikan suatu fungsi $f(z)$ ke dalam ekspansi deret Maclaurin.
   b) Mengasumsikan suatu fungsi rasional $R_{L,M}(z)$ yang didefinisikan sebagai:
   $$R_{L,M}(z)=\frac{P_L(z)}{Q_M(z)},$$
   dengan $Q_M(z)\neq 0$ untuk menghampiri fungsi $f(z)$ sehingga berlaku
   $$Q_M(z)\cdot f(z)-P_L(z)=O[z^{L+M+1}].$$
   dimana $O(z^{L+M+1})$ merupakan sisa pemotongan untuk suku ke-*(L+M+1)*.
   c) Membentuk suatu sistem persamaan koefisien untuk masing-masing konstanta pada variabel $z^0,z,z^2,\cdots$.
   d) Menentukan koefisien-koefisien pembilang dan penyebut fungsi rasional $R_{L,M}(z)$ dengan menyelesaikan sistem persamaan koefisien yang diperoleh.
2. Penerapan aproksimasi Padé pada hampiran fungsi eksponensial dan fungsi trigonometri (fungsi sinus dan fungsi kosinus) untuk fungsi rasional dengan $L=M=1$ dan fungsi rasional dengan $L=2$ dan $M=1$ menghasilkan suatu nilai hampiran (aproksimasi) sebagai berikut:
   a) Fungsi Eksponensial
   - Untuk $L=M=1$
   $$e^z\approx\frac{\left(1+\frac{1}{2}z\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z\right)}.$$
   - Untuk $L=2$ dan $M=1$

$$e^z \approx \frac{\left(1+\frac{2}{3}z+\frac{1}{6}z^2\right)}{\left(1-\frac{1}{3}z\right)}.$$

b) Fungsi Sinus
- Untuk $L = M = 1$

  $\sin z \approx z$.
- Untuk $L = 2$ dan $M = 1$

  $\sin z \approx z$.

c) Fungsi Kosinus
- Untuk $L = M = 1$

  $\cos z \approx 1$.
- Untuk $L = 2$ dan $M = 1$

  $\cos z \approx 1 - \frac{1}{2}z^2$.

SARAN

Dengan adanya kajian tentang aproksimasi Padé dan contoh penerapannya pada fungsi transenden jenis fungsi eksponensial dan fungsi trigonometri (fungsi sinus dan fungsi kosinus), pembaca juga bisa mengembangkan kajian ini dengan menerapkan aproksimasi Padé untuk menghampiri fungsi pada jenis-jenis yang lain misalnya fungsi aljabar dengan bentuk yang rumit ataupun fungsi trigonometri jenis tangen, dll.

DAFTAR PUSTAKA

Azwar, Saifuddin. 2004. Metode Penelitian. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.
Baker, George A dan Peter Graves-Morris. 1981. Padé Approximants Part I: Basic Theory. Canada: Addison-Wesley Publishing Company.
Churchill, Ruel Vance. 1990. Complex Variables and Applications fifth edition. Singapura: McGraw-Hill Book.
Munir, Rinaldi. 2009. Metode Numerik. Bandung: Informatika Bandung.
Roziana, Dewi Farida. 2008. Solusi Analitik dan Solusi Numerik Persamaan Divusi Konveksi. Malang: Skripsi Jurusan Matematika UIN Malang.
Santoso, Gatot Iman. 2003. Aproksimasi Polinomial sebagai Metode Hampiran untuk Fungsi yang Mempunyai Turunan ke-n yang Kontinyu. Madiun: Universitas Katolik Widya Mandala.
Soemantri, R. 1994. Fungsi Variabel Kompleks. Yogyakarta: Unversitas Gajah Mada.
Spiegel, Murray R. 1964. Peubah Kompleks dengan Pengenalan Pemetaan Konvormal dan Penerapannya, terjemahan Koko Martono. Jakarta: Erlangga.
Murray. 1999. Transformasi Laplace. Jakarta: Erlangga.
Triatmodjo, Bambang. 2002. Metode Numerik. Yogyakarta: Beta Offset